

Introduction au traitement d'images

Enseignement intégré

ITEC2 | Informatique 2A | 2025-2026

Chapitre 5 : Transformée de Fourier

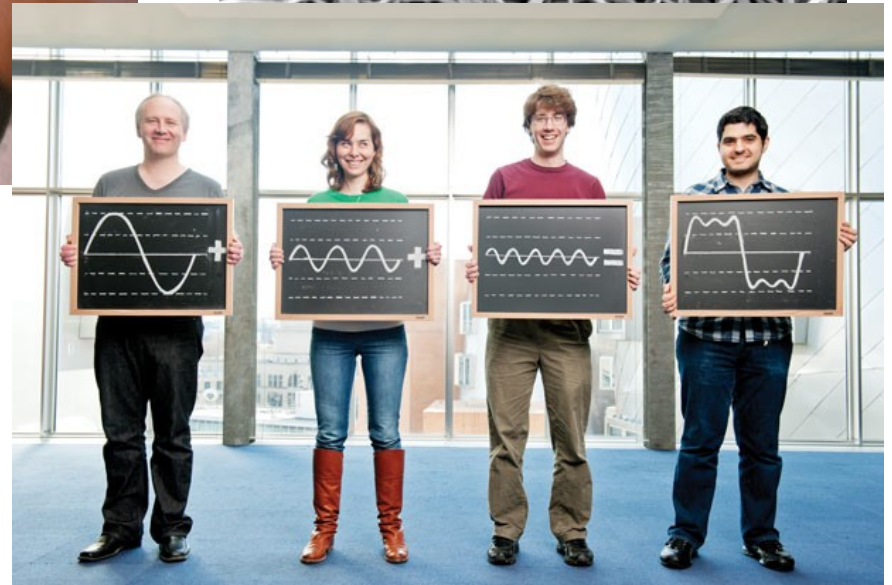
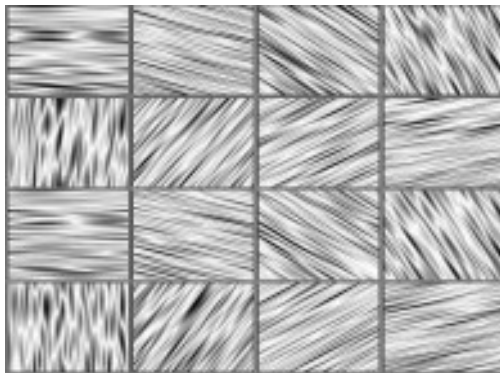
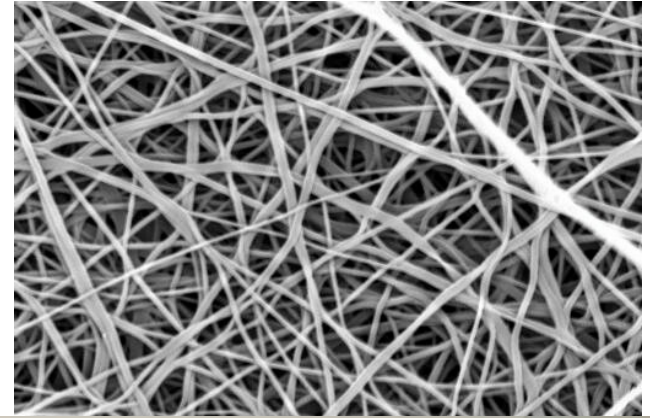
Rémi Giraud

remi.giraud@enseirb-matmeca.fr

<https://remi-giraud.enseirb-matmeca.fr/>

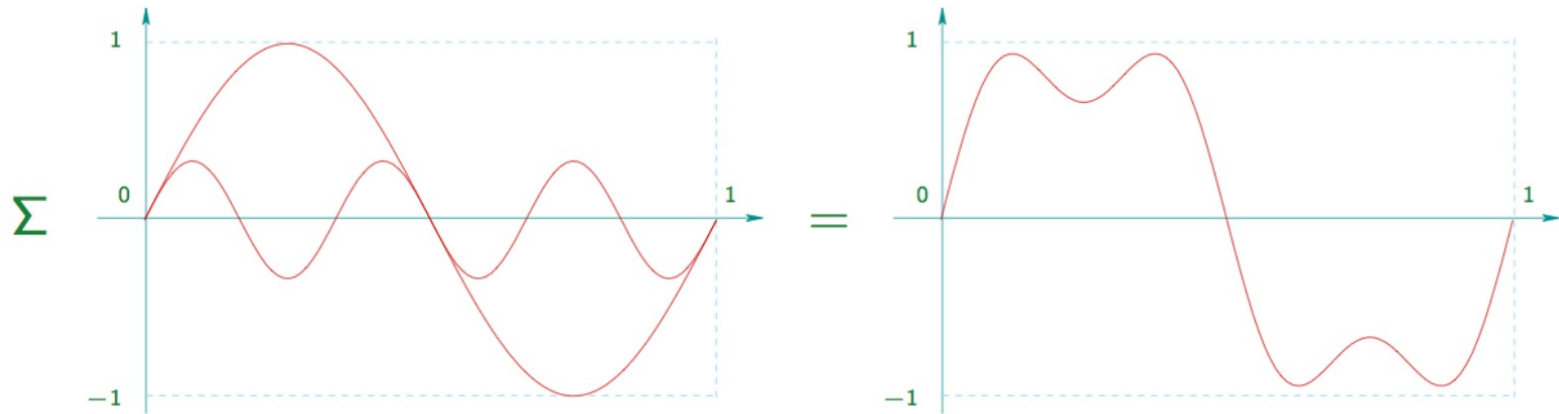
- **Introduction**
- **Formation / Acquisition**
- **Image couleur**
 - Format/Affichage/Synthèse
 - Espaces couleur caractéristiques (YCbCr)
 - Applications : compression, esquisse
- **Traitements**
 - Filtrage linéaire / non linéaire
 - Applications : débruitage, anonymisation
 - Détection de contours
 - Applications : réhaussement de contraste
- **Transformée de Fourier**
 - Application : recouvrement fréquentiel
- **Compression d'images**
 - Application : algorithme JPEG
- **Transformation spatiales**

Une richesse fréquentielle omniprésente



Signal complexe 1D

- Somme de signaux simples



- Transformée de Fourier :
 - Écriture sous la forme d'une somme infinie de fonctions sinusoïdales

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{i2\pi n u_0 x}$$

Transformée de Fourier 2D

- Transformée directe

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy = TF(f(x, y))$$

variables
fréquentielles

variables
spatiales

- Transformée inverse

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv = TF^{-1}(F(u, v))$$

Transformée de Fourier 2D

- Transformée continue d'une séquence discrète (TFCD)

$$F_n(u, v) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(mT_e^x, nT_e^y) e^{-j2\pi(u m T_e^x + v n T_e^y)}$$

Diagram illustrating the 2D Continuous Fourier Transform (TFCD) equation:

- $F_n(u, v)$: transformée (f_e^x, f_e^y) -périodique
- mT_e^x, nT_e^y : périodes d'échantillonnage
- $e^{-j2\pi(u m T_e^x + v n T_e^y)}$: fenêtrage et échantillonnage des fréquences

- Transformé discrète d'une séquence discrète (TFD)

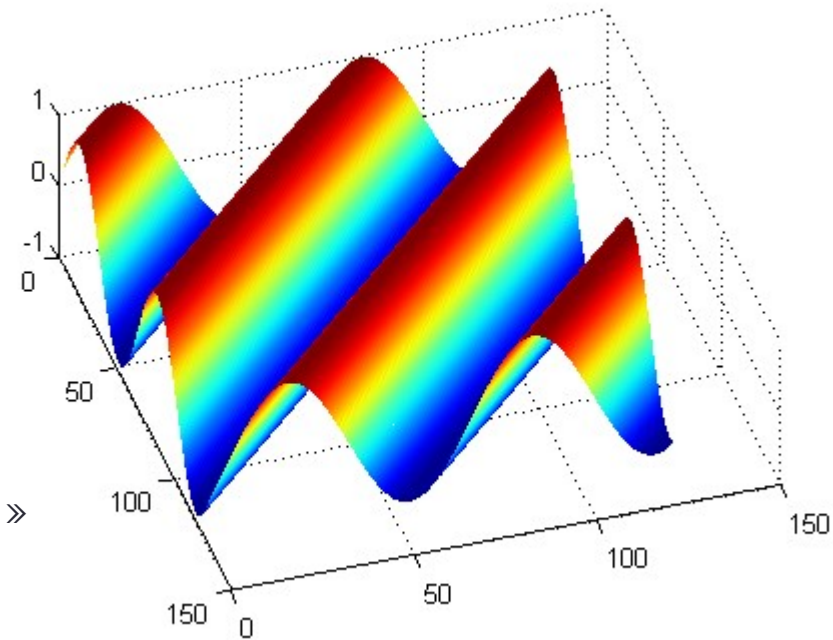
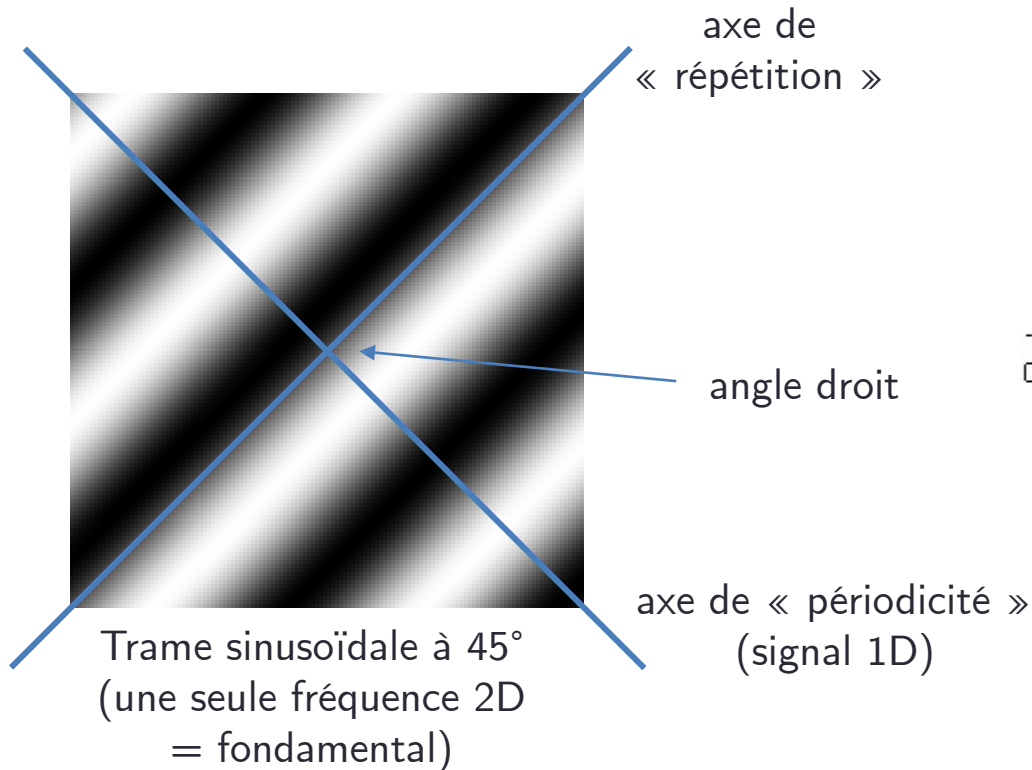
$$F(k, l) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) e^{-j2\pi \left(k \frac{m}{M} + l \frac{n}{N} \right)}$$

Diagram illustrating the 2D Discrete Fourier Transform (TFD) equation:

- $F(k, l)$: variables discrètes $\begin{cases} k \in [0, M-1] \\ l \in [0, N-1] \end{cases}$

Signal harmonique 2D

- Sinusoïde parfaite = répétition d'un motif selon un certain axe
- Texture = image périodique



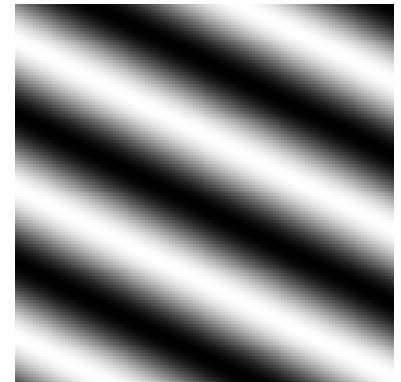
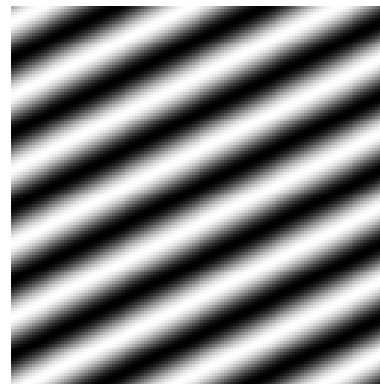
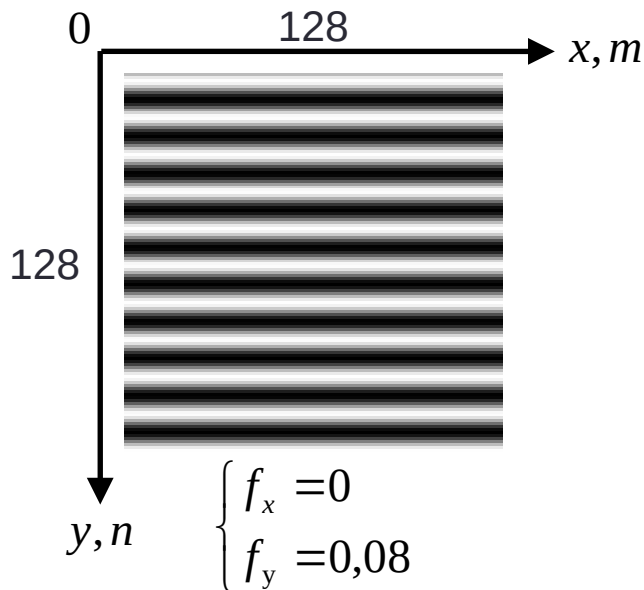
Représentation 3D

Signal harmonique 2D

$$f(x, y) = \sin 2\pi(f_x x + f_y y) \quad \begin{cases} x = mT_e^x, & m \in [0, M - 1] \\ y = nT_e^y, & n \in [0, N - 1] \end{cases}$$

fréquence
horizontale

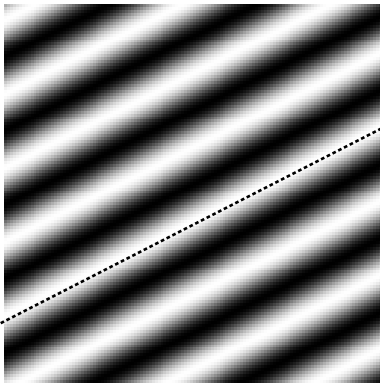
fréquence
verticale



Signal harmonique 2D

$$f(x, y) = \sin 2\pi(f_x x + f_y y)$$

$$\begin{cases} f_x = 0,02 \\ f_y = 0,04 \end{cases}$$

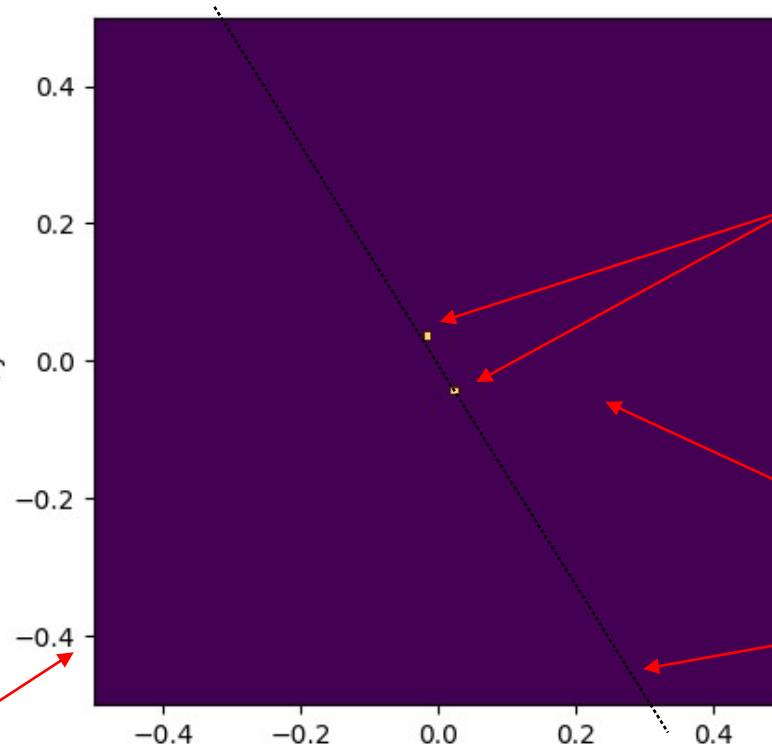


Signal 2D harmonique à une seule fréquence (fondamental)

orientation

$|TF(\cdot)|$

fréquences réduites



Amplitude du spectre

paire de Dirac de coordonnées $(-f_x, -f_y), (f_x, f_y)$

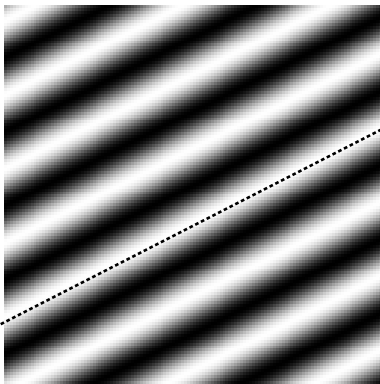
convolution par un sinus cardinal 2D (fenêtrage)

axe fréquentiel orthogonal à l'orientation de la trame

Signal harmonique 2D

$$f(x, y) = \sin 2\pi(f_x x + f_y y)$$

$$\begin{cases} f_x = 0,02 \\ f_y = 0,04 \end{cases}$$

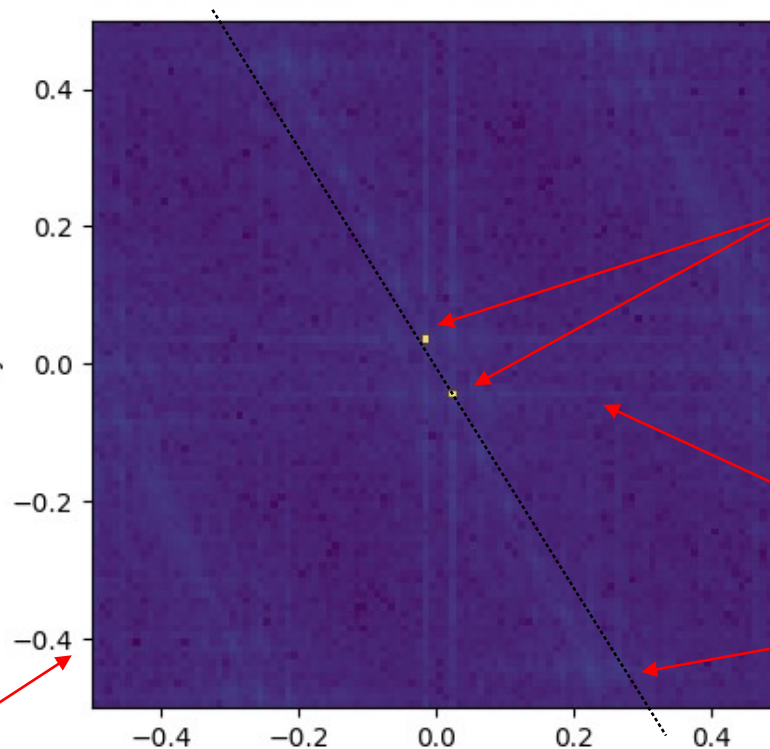


Signal 2D harmonique à une seule fréquence (fondamental)

orientation

$|TF(\cdot)|$

fréquences réduites



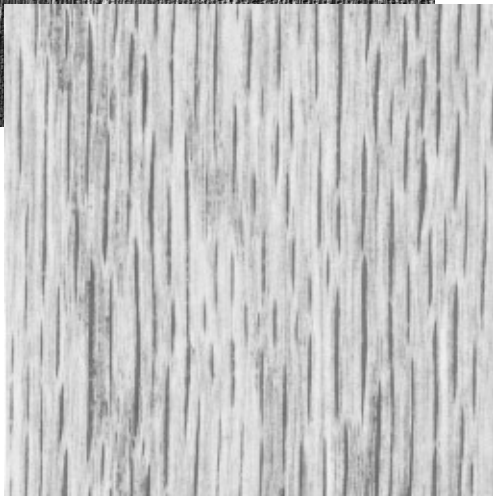
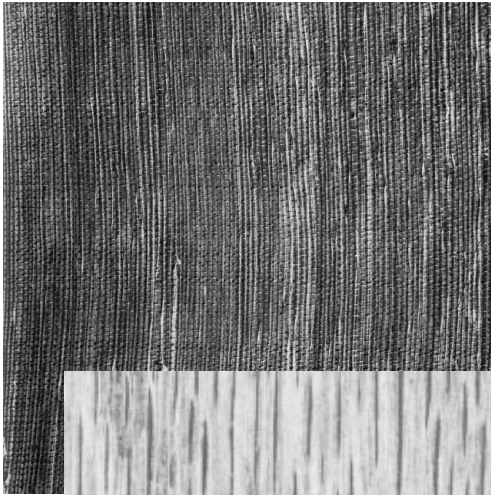
Amplitude du spectre
(échelle logarithmique)

paire de Dirac de coordonnées
 $(-f_x, -f_y), (f_x, f_y)$

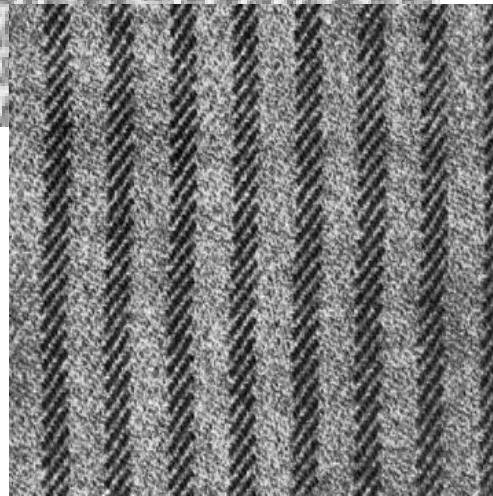
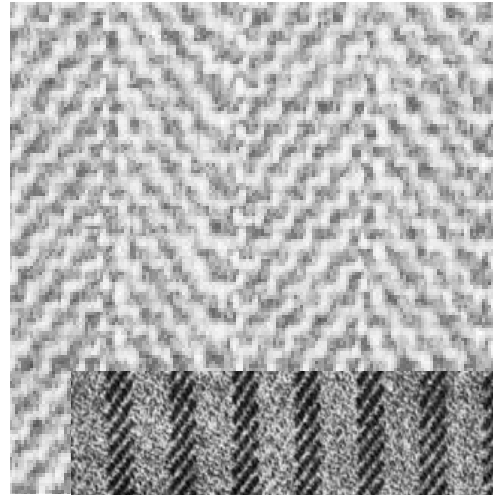
convolution par un sinus cardinal 2D (fenêtrage)

axe fréquentiel orthogonal à l'orientation de la trame

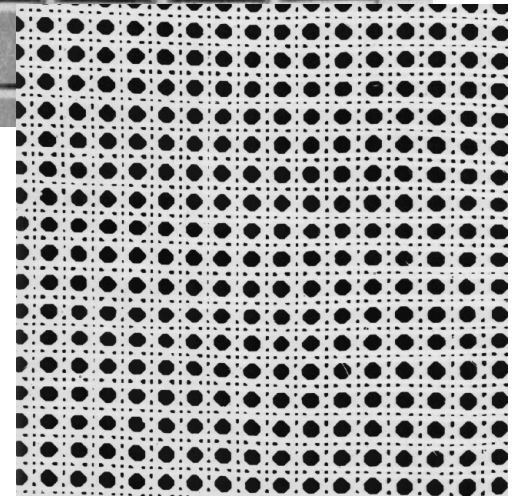
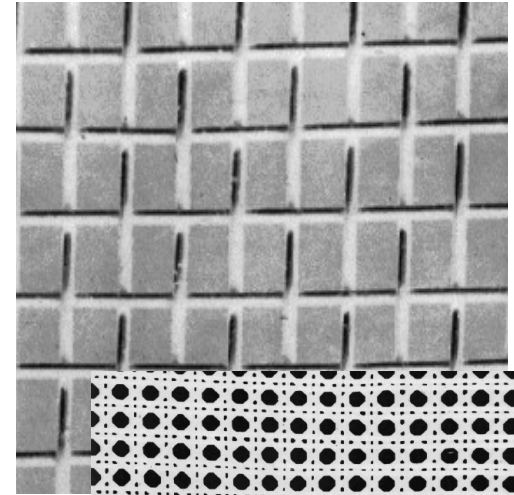
Textures pseudo-périodiques



« 1 période »

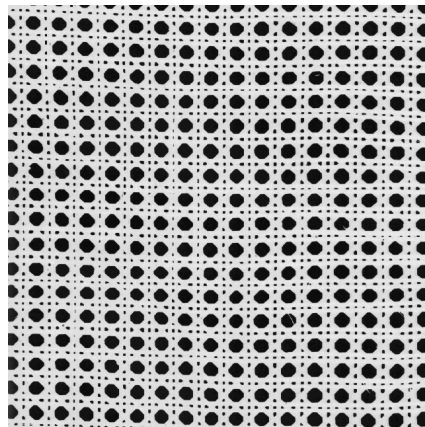


« 2 périodes »

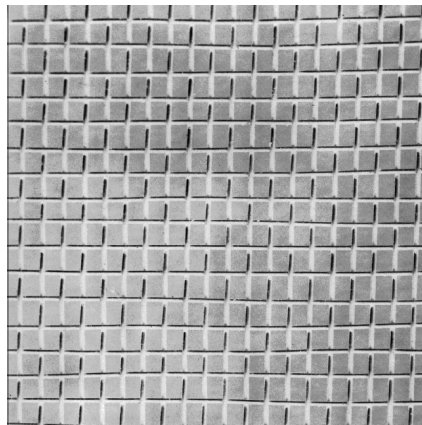
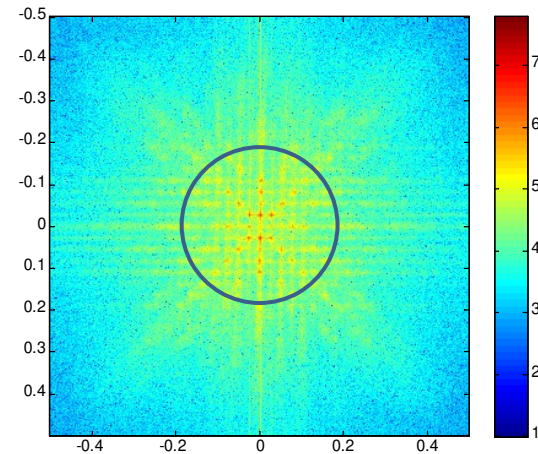


Textures pseudo-périodiques

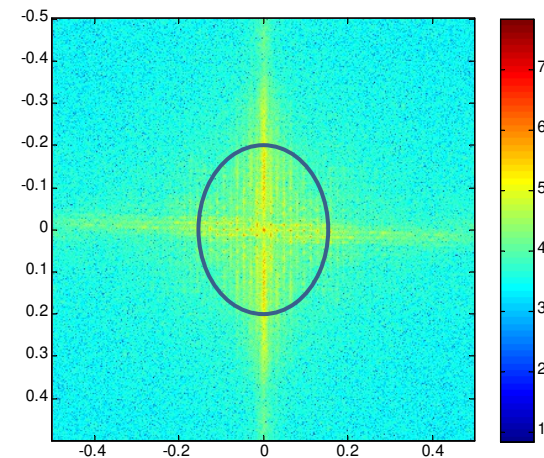
- « Paires de Dirac » diffuses correspondant à des fréquences fondamentales et des harmoniques



$|TF(.)|$



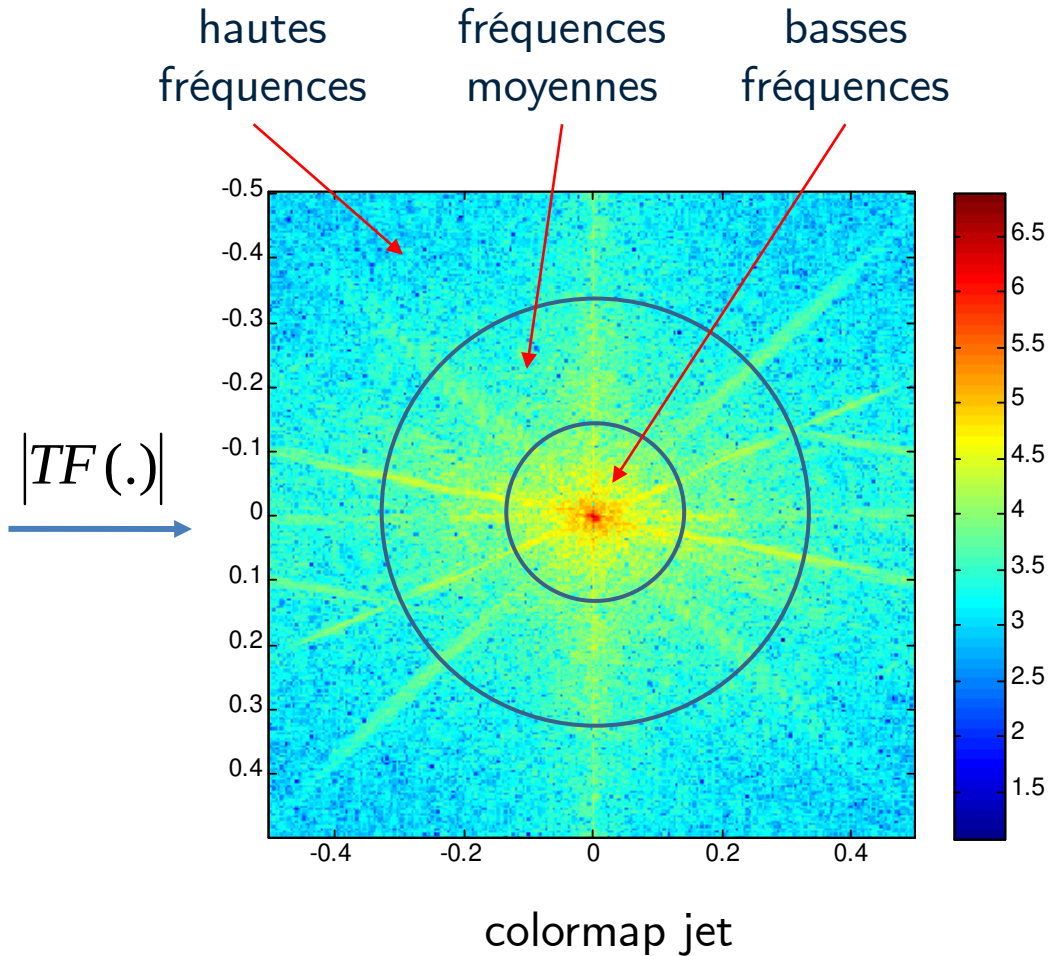
$|TF(.)|$



Sur une image naturelle



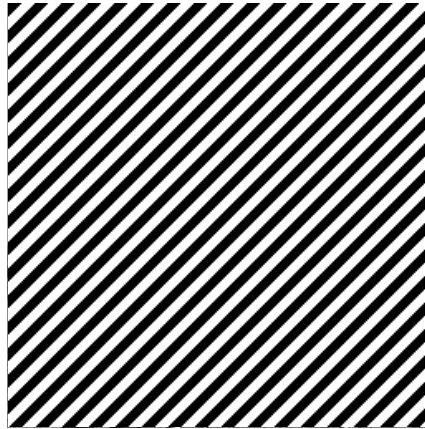
Image naturelle



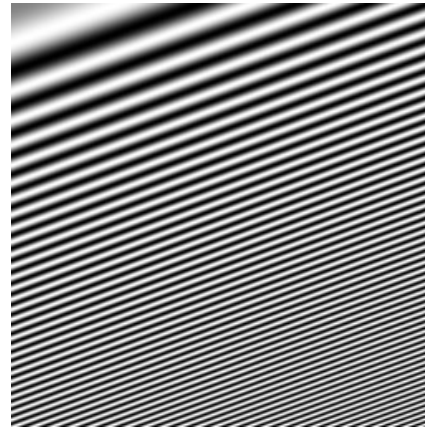
Quiz : Retrouver à quelles images correspondent ces transformées



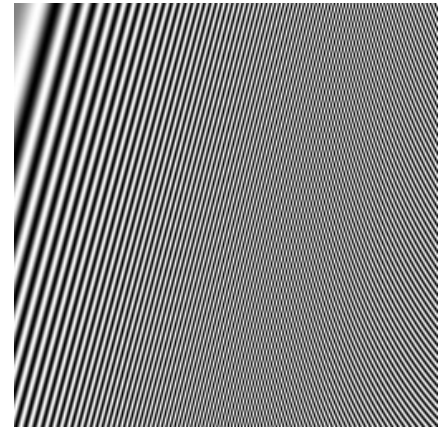
(1)



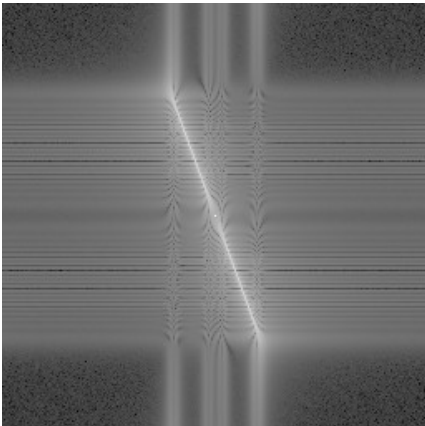
(2)



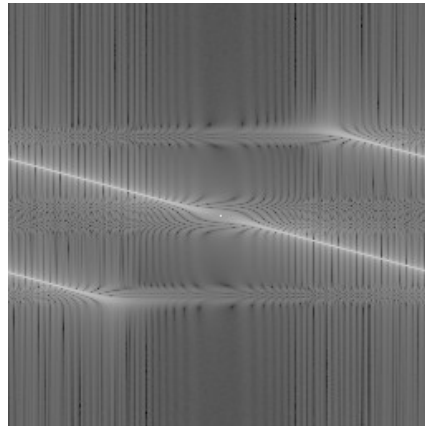
(3)



(4)



(a)



(b)



(c)



(d)

Quiz : Retrouver à quelles images correspondent ces transformées



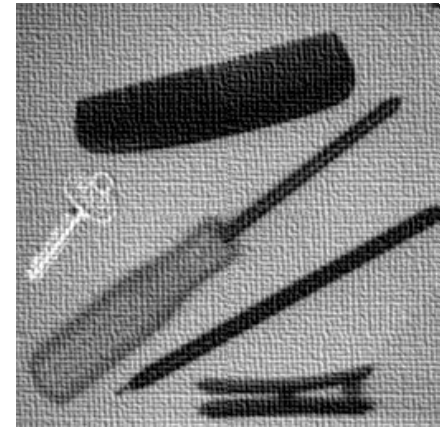
(1)



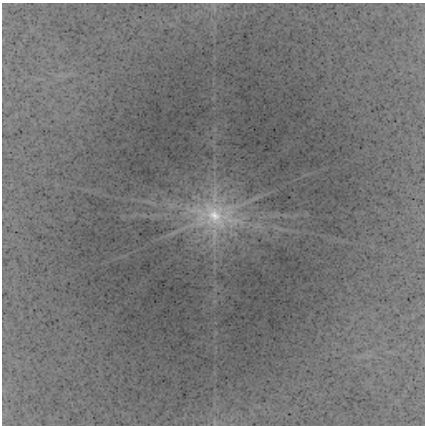
(2)



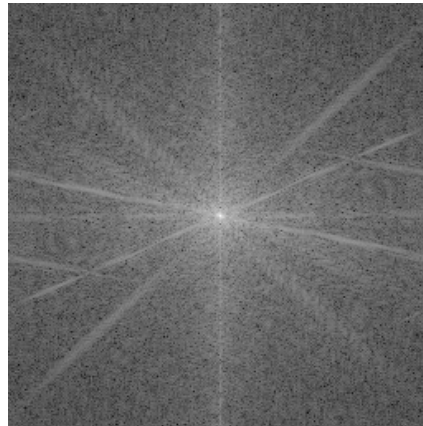
(3)



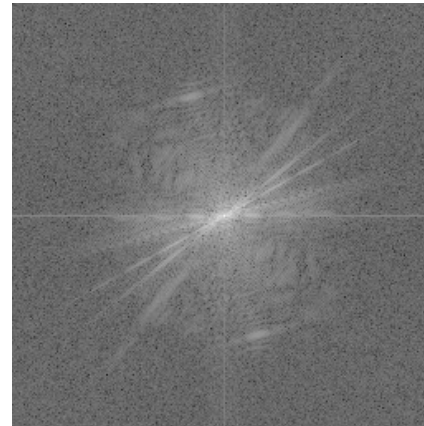
(4)



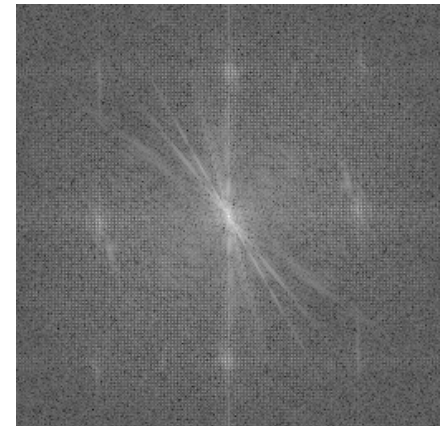
(a)



(b)



(c)



(d)

Affichage

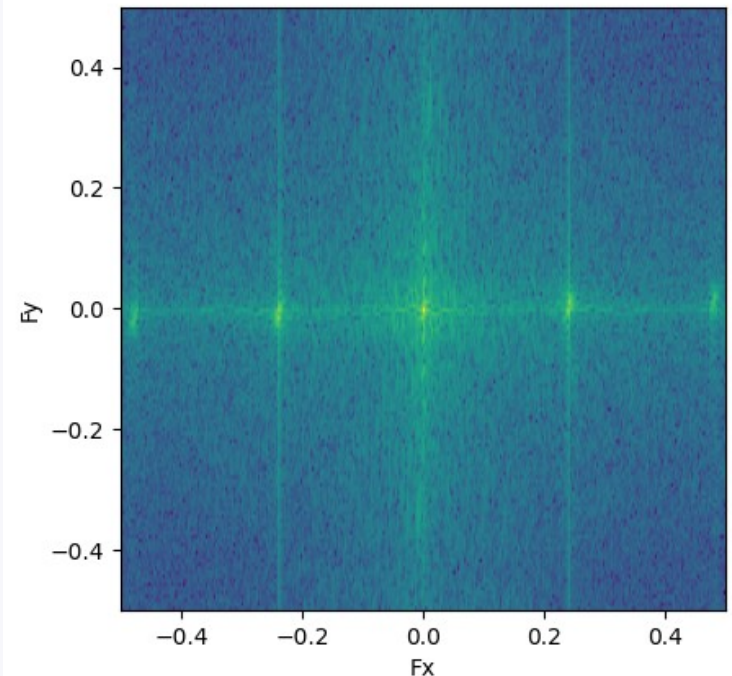
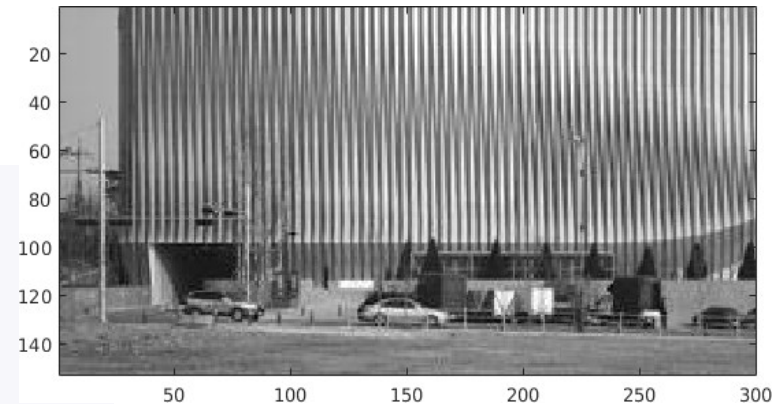
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

I = plt.imread('./img/building.jpg')
I = I.astype('double')

plt.figure(1)
plt.imshow(I, cmap='gray')
[h,w] = I.shape

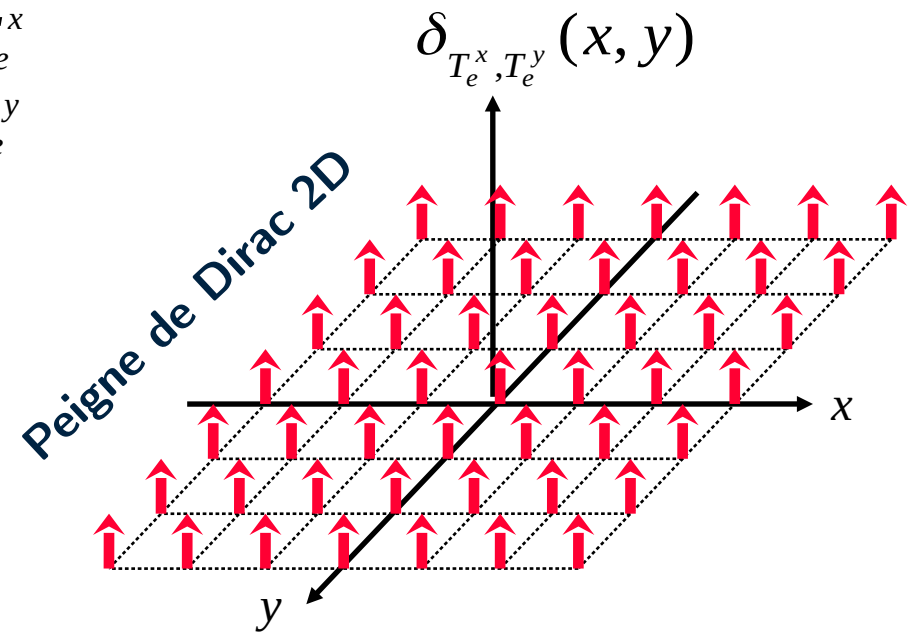
#Transformee de Fourier centree en 0
I_fft2 = np.fft.fftshift(np.fft.fft2(I))
#Affichage du log module
I_fft2_lm = np.log10(np.abs(I_fft2))

#Attention à fixer les axes pour interpreter les
#frequences
plt.figure(2)
plt.imshow(I_fft2_lm, extent=[-0.5, 0.5, 0.5, -0.5])
plt.ylabel('Fy')
plt.xlabel('Fx')
plt.show()
```



Domaine discret : Échantillonnage par un peigne de Dirac

$$f_n(x, y) = \begin{cases} f_a(x, y) & \text{pour } \begin{cases} x = mT_e^x \\ y = nT_e^y \end{cases} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

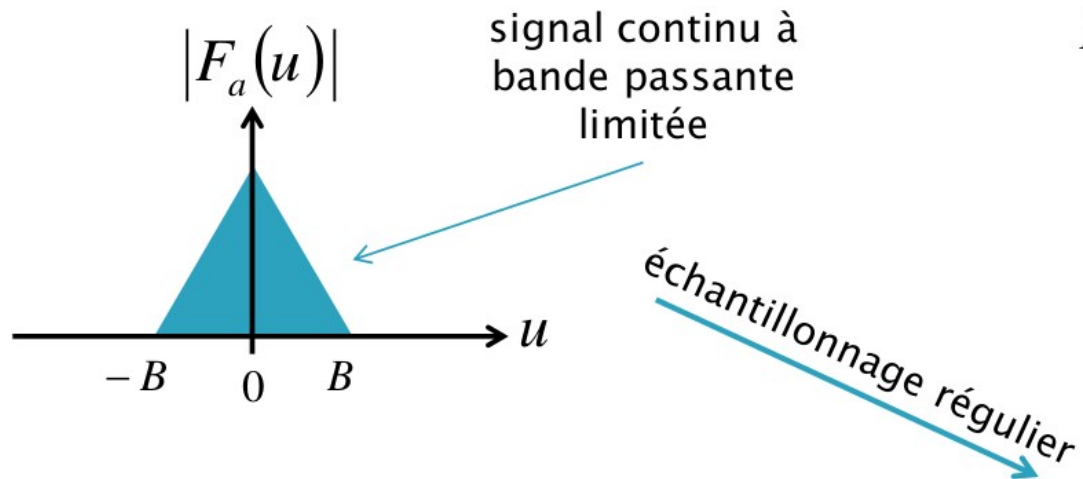


$$\delta_{T_e^x, T_e^y}(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - mT_e^x, y - nT_e^y)$$

$$\begin{aligned} & \delta_{T_e^x, T_e^y}(x, y) \\ & \downarrow \\ & f_a(x, y) \longrightarrow \bigcirc \times \longrightarrow f_n(x, y) \\ & f_n(x, y) = f_a(x, y) \delta_{T_e^x, T_e^y}(x, y) \end{aligned}$$

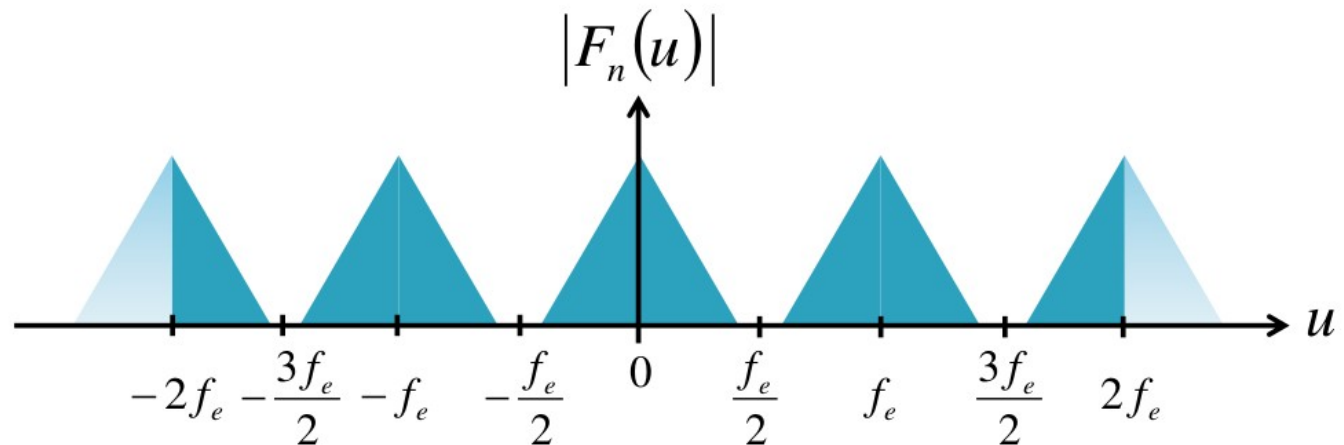
→ Séquence discrète $f_n(x, y)$ notée $f(mT_e^x, nT_e^y)$ ou $f(m, n)$

Périodisation du spectre dans l'espace fréquentiel

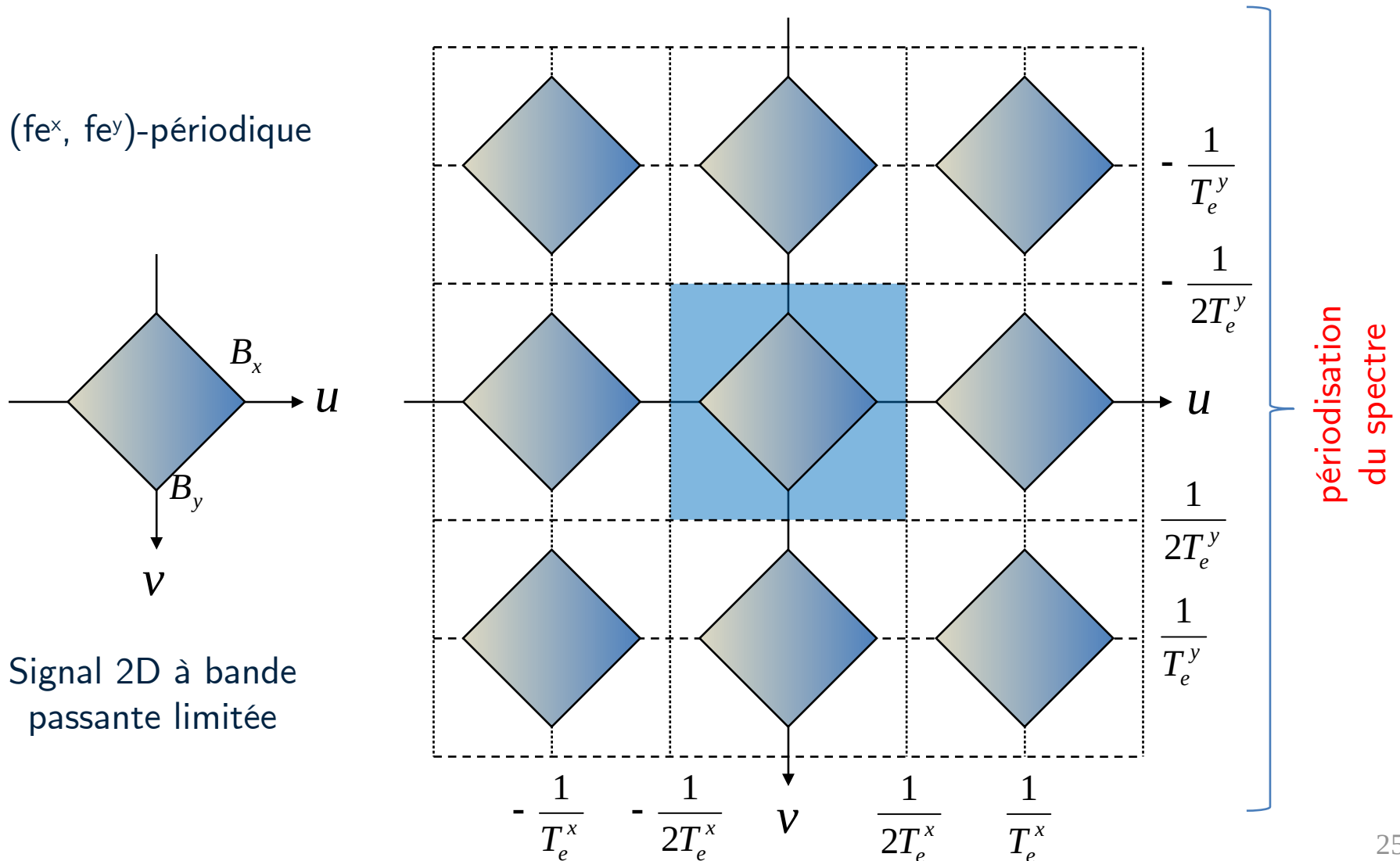


$$\begin{aligned} F_n(u) &= TF(f_n(u)) \\ &= TF(f_a(t)\delta_{T_e}(t)) \\ &= TF(f_a(t)) * TF(\delta_{T_e}(t)) \\ &= F_a(u) * \delta_{1/T_e}(u) \end{aligned}$$

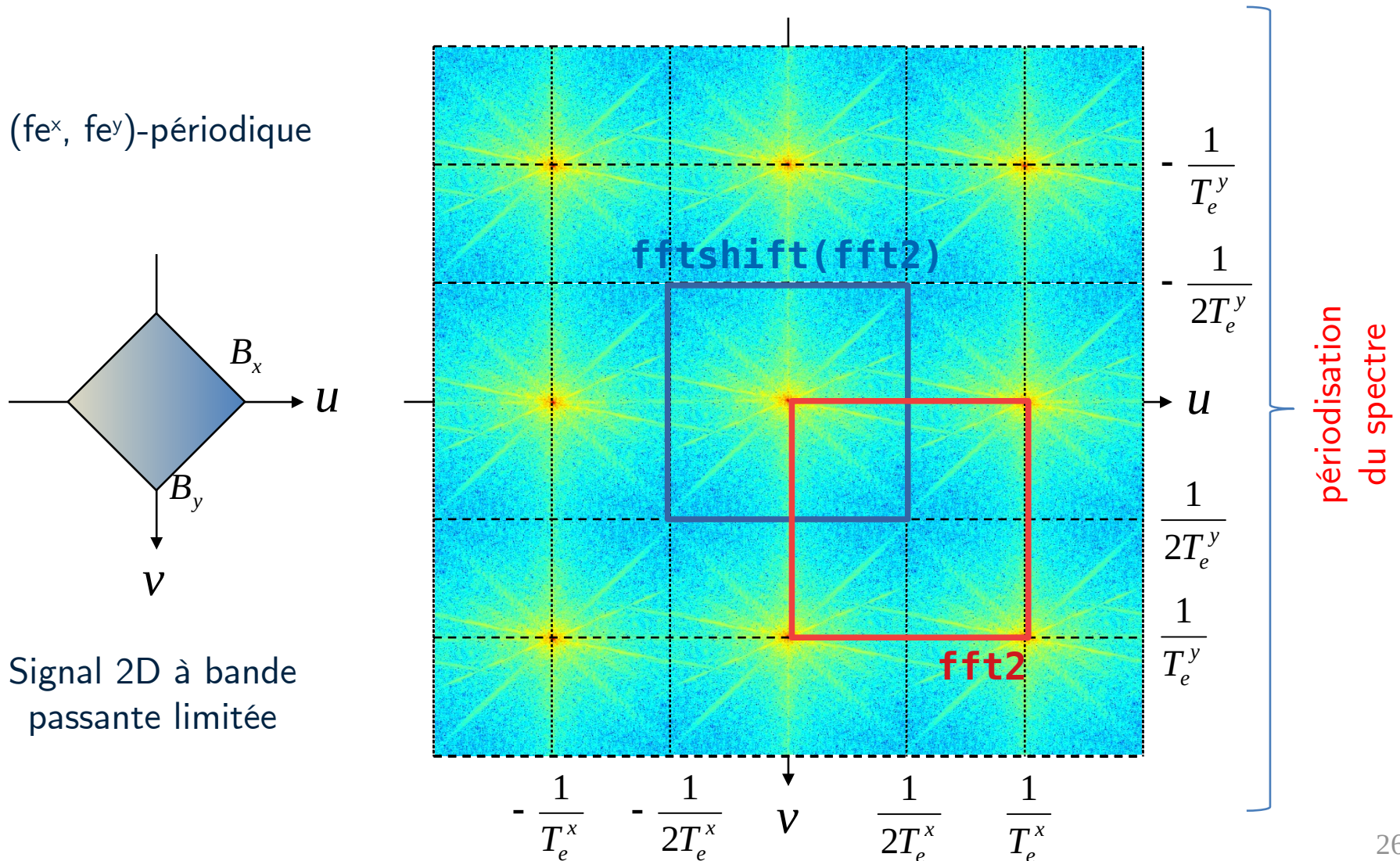
Périodisation
du spectre



Périodisation du spectre dans l'espace fréquentiel

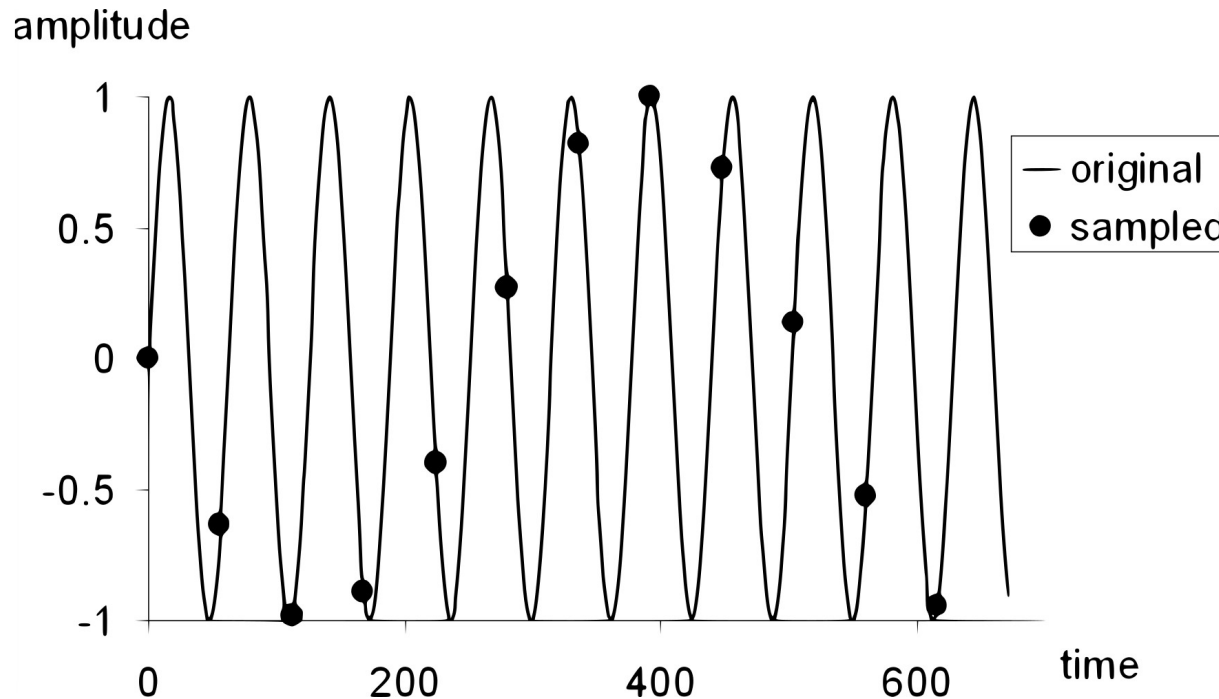


Périodisation du spectre dans l'espace fréquentiel



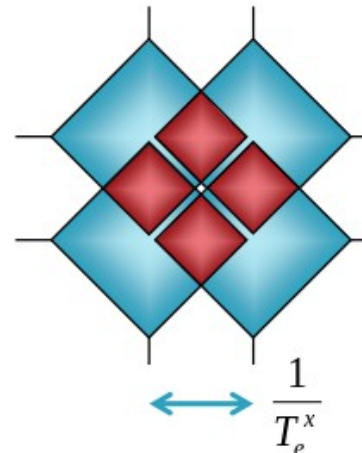
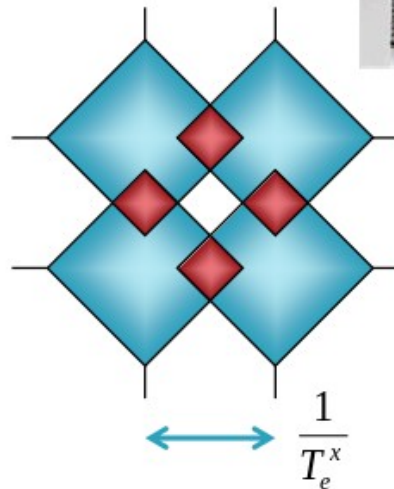
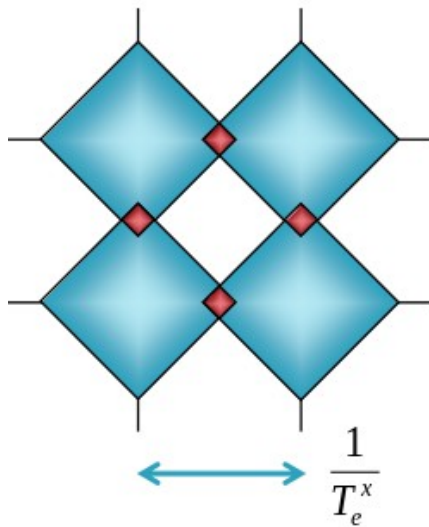
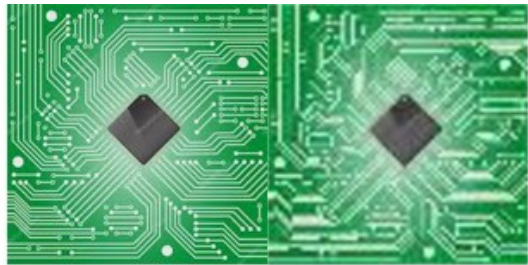
Phénomène d'Aliasing (ou repliement spectral)

- Choisir une période / fréquence d'échantillonnage adaptée pour capturer les variations du signal
- Sinon risque de dénaturer le signal échantillonné



Phénomène d'Aliasing (ou repliement spectral)

- Sur des images naturelles



Filtrage anti-aliasing

- Observer ce problème de repliement de spectre liés à l'échantillonnage spatial en sous-échantillonnant *barbara.png* ou *bricks.png* d'un facteur 4.
- Observer également la transformée de Fourier des images.
- Lisser l'image initiale par un filtre passe-bas d'anti-repliement, type Gaussienne, avant le sous-échantillonnage. On comparera ce résultat également à celui obtenu par `skimage.transform.resize`.



Image initiale ($h \times w$)



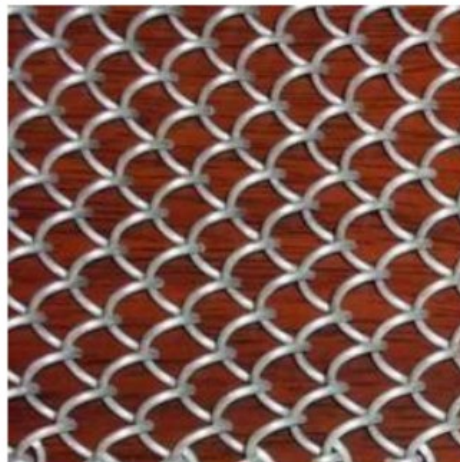
Image sous-échantillonnée
($h/4 \times w/4$)



Image filtrée et sous-échantillonnée
($h/4 \times w/4$)

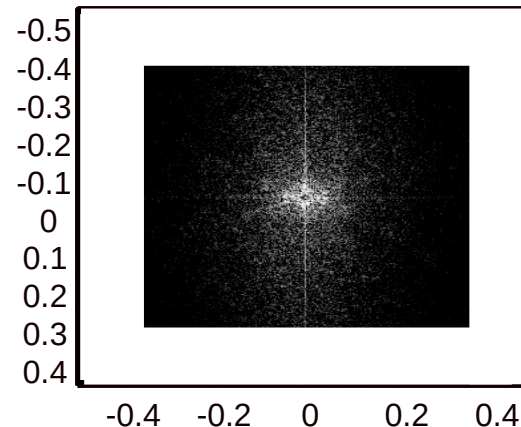
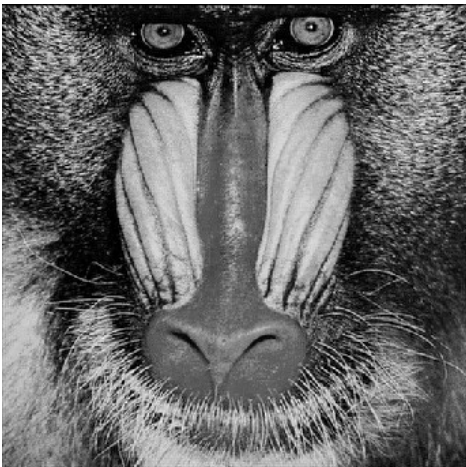
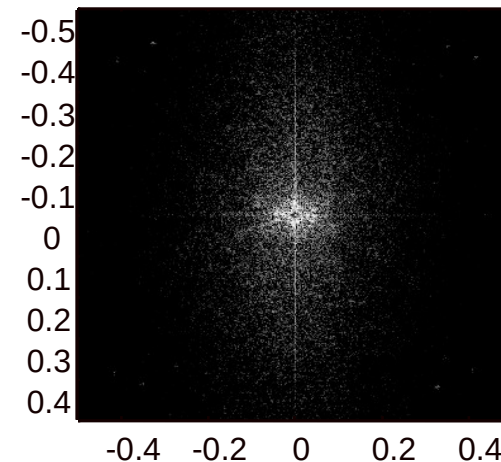
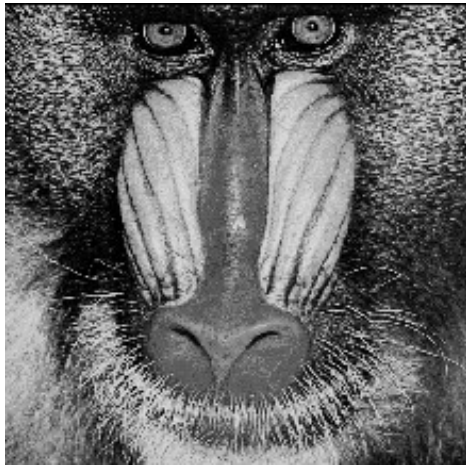
Exemples d'application – Analyse de textures

- TF efficace pour caractériser les textures



Exemples d'application – Compression d'images (JPEG)

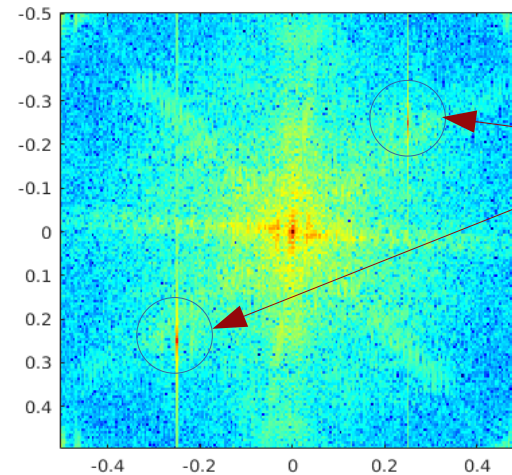
- Suppression des hautes fréquences → implémentation au chap. 6



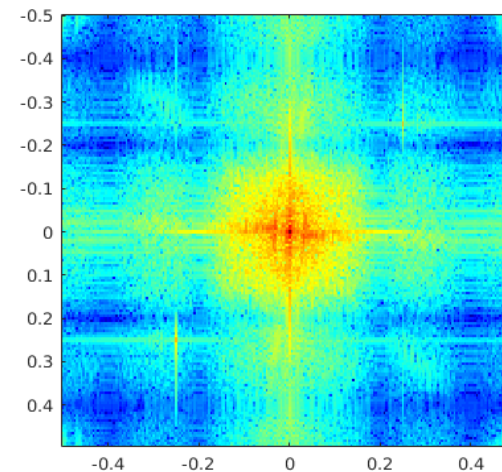
Mise à zéro
des
coefficients
haute
fréquence

Exemples d'application – Filtrage fréquentiel

- Bruit fréquentiel. Inefficacité des filtres moyeneurs classiques

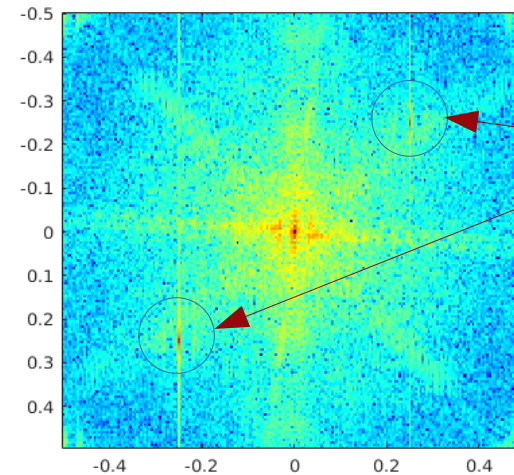


Filtre moyeneur carré 5x5

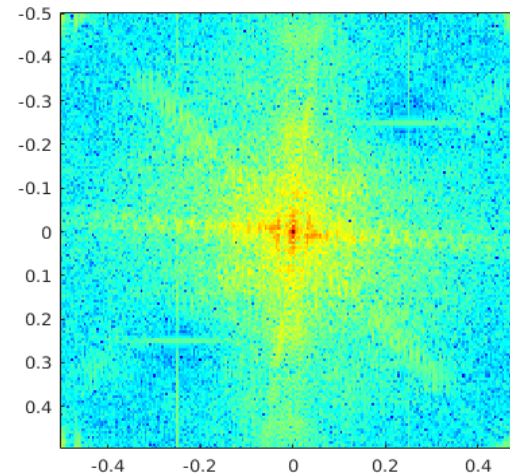


Exemples d'application – Filtrage fréquentiel

- Filtrage par un filtre coupe bande → implémentation en TP



présence
du bruit



Filtre coupe bande spécifique